

Tomasz Jurkiewicz*

Agnieszka Poblócka**

Badanie zmienności rezerwy IBNR w ubezpieczeniach majątkowych

Wstęp

Szacowanie rezerwy z tytułu powstałych szkód niezgłoszonych w zakładzie ubezpieczeń do dnia tworzenia rezerw techniczno-ubezpieczeniowych (*Incurring But Not Reported*, IBNR) nie należy do zadań prostych w ubezpieczeniach majątkowych i pozostałych osobowych. Szczególnie, że zgodnie z wymogami europejskiego projektu wypłacalności Solvency II rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe mają być zawiązywane według zasady „najlepszego oszacowania” (*best estimate*) i powiększone o pewien narzut bezpieczeństwa (*margin risk*) uwzględniający ocenę ich zmienności (*volatility*)¹.

Głównym celem artykułu jest weryfikacja, czy istnieje optymalny model rezerwy IBNR w ubezpieczeniach działu II wśród wybranych deterministycznych i stochastycznych metod szacowania ww. rezerwy oraz sprawdzenie, czy badane metody pozwalają oszacować powstałe szkody niezgłoszone ubezpieczycielowi na poziomie „bezpiecznym”, tj. wystarczającym do pokrycia roszczeń. Do realizacji celu zaprezentowano wyniki estymacji rezerw IBNR w zaprojektowanych eksperymentach symulacyjnych rynku ubezpieczeniowego, na podstawie których dokonano oceny zmienności badanej rezerwy. Dodatkowym celem badania było skontrolowanie poprawności obliczeń miar dokładności predykcji – błędów rezerw RMSEP (*the root mean squared error of prediction*) w rozważanych metodach.

W analizie uwzględnione zostały następujące metody:

- 1) średnich wartości wskaźników rozwoju szkody (SW1),

* Dr, Katedra Statystyki, Wydział Zarządzania, Uniwersytet Gdański,
jurkiewicz@wzr.ug.edu.pl

** Dr, Katedra Statystyki, Wydział Zarządzania, Uniwersytet Gdański,
a.poblocka@ug.edu.pl

¹“The value of technical provisions should be equal to the sum of a best estimate and a risk margin”, V.2. Technical Provisions in [Revised Technical Specifications for the Solvency II valuation and Solvency Capital Requirements calculations (Part I)].

- 2) średnich wartości wskaźników rozwoju szkody (SW2)²,
- 3) Bornhuettera-Fergusona (BF),
- 4) chain ladder (CL),
- 5) grossing up (GU),
- 6) logarytmiczno-normalny model klasy uogólnionych modeli liniowych (skrót GLM; LN_GLM),
- 7) rozproszony model Poissona klasy GLM³ (ODP_GLM),
- 8) bootstrapowy model Macka klasy GLM (Mack_GLM),
- 9) bootstrapowy model logarytmiczno-normalny klasy GLM (boot_LN_GLM),
- 10) bootstrapowy rozproszony model Poissona klasy GLM (boot_ODP_GLM),
- 11) bootstrapowy model gamma klasy GLM (boot_gamma_GLM),
- 12) bootstrapowy model Macka klasy GLM (boot_Mack_GLM),
- 13) bootstrapowy model Macka chain ladder klasy GLM (boot_Mack_CL_GLM).

Zasady kalkulacji powyższych modeli opisali m.in.: dla metod deterministycznych (metod 1–5) [Poblócka, 2008; Wieteska, 2004], dla klasycznych modeli stochastycznych (metod 6–7) [England, Verrall, 2002; Poblócka, 2011; Wuthrich, Merz, 2008] oraz dla nieklasycznych stochastycznych modeli bootstrapowych (metod 8–13) [Pinheiro, de Lourdes Centeno, 2000; Jurkiewicz, Poblócka, 2011a; Jurkiewicz, Poblócka, 2011b].

1. Optymalny model rezerwy IBNR

W [Jurkiewicz, Poblócka, 2011 a; Poblócka, 2012], na podstawie wykonanych kilku serii eksperymentów symulacyjnych⁴, stwierdzono m.in., że z aktualnie używanych w praktyce ubezpieczeniowej metod deterministycznych (metod 1–5) tylko chain ladder i grossing up zapewniają oszacowanie rezerwy IBNR na poziomie odpowiednio bezpiecznym (tj. wystarczającym do pokrycia roszczeń z ich tytułu) i nie są

² Całkowite szkody w okresach wypadkowych w metodzie SW1 są równe wypłaconym odszkodowaniom i świadczeniom z ostatniego okresu badanego, a w metodzie SW2 są równe iloczynowi składki przypisanej z okresu wypadkowego i wskaźnika szkodowości z okresu poprzedzającego.

³ W literaturze wymienia się dwie metody: model Poissona klasy GLM i jego uogólnienie – rozproszony model Poissona klasy GLM.

⁴ Przyjęto założenia analogiczne do symulacji dla metod stochastycznych przedstawionych w tym artykule.

wrażliwe na zmiany wskaźnika szkodowości lub zmianę wielkości portfela ubezpieczeń.

W celu zidentyfikowania optymalnego (tj. charakteryzującego się największą precyzją)⁵ modelu rezerwy IBNR w warunkach praktycznych w [Jurkiewicz, Pobłocka, 2011b] zaimplementowano stochastyczne modele rezerwy IBNR (metody 6–13) dla danych szkodowych opublikowanych przez Charlesa i Westphala [2006] oraz Taylora i Ashego [1983]⁶. W obu badanych przypadkach najlepszym modelem „całkowitej” rezerwy IBNR⁷ okazał się nieklasyczny bootstrapowy model Macka chain ladder klasy GLM. Na drugim miejscu znalazły się klasyczne stochastyczne modele chain ladder⁸, przy czym dla jednego trójkąta szkód był to rozproszony model Poissona klasy GLM, a dla drugiego trójkąta szkód był to model Macka klasy GLM. W pozostałych metodach oszacowane łączne rezerwy IBNR różniły się znacząco. Niestety, analizując wyniki estymacji badanej rezerwy w poszczególnych okresach wypadkowych, nie udało się wyznaczyć optymalnego modelu „indywidualnej” rezerwy IBNR⁹.

W celu sprawdzenia, czy wyniki estymacji rezerwy IBNR z [Jurkiewicz, Pobłocka, 2011 b] można uogólnić, tzn. czy bootstrapowy model Macka chain ladder klasy GLM jest najlepszym modelem¹⁰ łącznej rezerwy IBNR, oraz czy istnieje optymalny model indywidualnej rezerwy IBNR w poszczególnych okresach wypadkowych, dla wszystkich badanych metod wykonano eksperymenty symulacyjne za pomocą programów napisanych w języku R (2.12.1). W analizie przyjęto, że szkody ubezpieczeniowe z tytułu jednorodnego portfela ubezpieczeń komuni-

⁵ Kryterium wyboru był najmniejszy błąd szacunku estymatora średniej rezerwy IBNR (m.in. pierwiastek ze średniego kwadratowego błędu prognozy – RMSEP oraz współczynnik zmienności oparty na średniej rezerwie – RMSEP w [%]).

⁶ W modelach bootstrapowych (metody 8-13) dla każdego trójkąta szkód wygenerowano 10 tys. reszt bootstrapowych („pseudodanych”), na podstawie których wykonano estymację rezerwy IBNR nieklasycznymi metodami próbkowania danych.

⁷ „Całkowita” rezerwa IBNR (tzw. łączna rezerwa IBNR) to sumaryczna wielkość rezerw z całego okresu badanego, tj. ze wszystkich okresów wypadkowych.

⁸ W literaturze model Macka klasy GLM oraz rozproszony model Poissona klasy GLM nazwane są stochastycznymi modelami chain ladder, gdyż oszacowane rezerwy mają identyczne wartości jak w deterministycznej metodzie chain ladder, a dodatkowo pozwalają oszacować zmienność rezerw.

⁹ „Indywidualna” rezerwa IBNR (tzw. rezerwa IBNR indywidualna w poszczególnych okresach wypadkowych) to sumaryczna wielkość rezerw w badanych okresach wypadkowych.

¹⁰ Najlepszy w sensie najdokładniejszy wg badanych miar dokładności.

kacyjnych OC to realizację zmiennych losowych w kolektywnym modelu ryzyka, w którym liczby szkód i wielkości pojedynczej szkody są nieznane i wzajemnie niezależne. Założono także niezależność szkód we wszystkich okresach wypadkowych. Dodatkowo przyjęto, że łączne szkody z danego okresu wypadkowego to iloczyn odpowiedniej liczby szkód i średniej wielkości pojedynczej szkody, która jest wypłacana z opóźnieniem zgodnie z oszacowanym rozkładem wypłat szkód¹¹ (tablica 1). Założono także, że liczba szkód jest zgodna z rozkładem Poissona, a wielkość pojedynczej szkody jest zgodna z rozkładem wykładniczym¹², których parametry zostały oszacowane na podstawie danych statystycznych dotyczących ubezpieczenia OC posiadaczy pojazdów mechanicznych w 2009 r. w Polsce¹³. Na potrzeby symulacji przyjęto, że liczba polis to 250 tys. (odpowiada to 1,43% udziałowi w rynku¹⁴); częstość szkód to 5,52% (tzn. liczba szkód to 138 tys. i oznacza, że co 18 polis generuje szkody); średnia wysokość szkody to 5500 zł; przeciętna wysokość składki to 400 zł; wskaźnik szkodowości brutto to 75,9%; minimalna wysokość szkody to 500 zł¹⁵; maksymalna wysokość szkody to 1 mln zł¹⁶.

¹¹ Rozkład wypłat szkód to rozkład opóźnienia w rozliczaniu szkody. Do analiz wykorzystano rozkład z tablicy 1, oszacowany na podstawie uśrednionych wartości uzyskanych z dostępnych w literaturze trójkątów szkód z tytułu ubezpieczenia komunikacyjnego OC posiadaczy pojazdów mechanicznych (10 grupa ubezpieczeń działu II).

¹² W badaniu rozważano kolektywny model ryzyka wyznaczany metodą analityczną dla małych szkód [Ronka-Chmielowiec, 2006]. Do opisu procesu ryzyka (rozkładu liczby szkód i indywidualnej wielkości szkody) użyto modelu Erlanga [Straub, 1997]. W kolejnych analizach planuje się rozważyć rozkłady prawdopodobieństwa dla dużych szkód (o ciężkich ogonach), w związku z rosnącym udziałem szkód osobowych w łącznej sumie wypłat.

¹³ W wspólnym raporcie UKNF i UFG z 2010 r. pt. *Ubezpieczenia komunikacyjne w latach 2005–2009* dla danych z 2009 r.: liczba polis = 17,46 mln, przeciętna roczna wielkość składki = 399,4 zł, liczba szkód = 964 015, częstość szkód = 5,52%, przeciętna wysokość szkody = 5149,3 zł, wskaźnik szkodowości brutto = 73,20%.

¹⁴ Taki udział odpowiada małej wielkości zakładowi ubezpieczeń. W kolejnych badaniach planuje się zwiększyć liczbę polis, tak aby udział w rynku stanowił ok. 5–6%, co będzie odpowiadać średniej wielkości zakładom ubezpieczeń.

¹⁵ Przyjęto założenie, że przy drobnych szkodach sprawcy bardziej opłaca się pokryć szkodę niż utracić zniżki.

¹⁶ To ograniczenie wielkości pojedynczej szkody niezbędne jest do wykonania obliczeń w metodach bootstrapowych. Oszacowano je na podstawie sumy gwarancyjnej dla szkód na mieniu w ubezpieczeniu komunikacyjnym OC z dnia 10.12.2009 (3 mln. euro, czyli ok. 1,24 mln zł na zdarzenie; wg kursu euro NBP z 10.12.2009 – 4,14 zł). W kolejnych badaniach planuje się tę wielkość zaktualizować, tj. zwiększyć do poziomu 1 mln euro.

Tablica 1. Rozkład opóźnienia w rozliczeniu szkody

Rok	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Procent rozliczonych szkód	55%	26%	7,5 %	4,3%	2,5%	2,0%	1,0%	0,9%	0,7%	0,1%

Źródło: Opracowanie własne.

Zgodnie z powyższymi założeniami wygenerowano 1 tys. macierzy szkód, z których każdą podzielono na trójkąt szkód „wypłaconych” i „przyszłych”¹⁷. Dla każdego trójkąta szkód „wypłaconych” oszacowano badanymi metodami rezerwy IBNR (metody 1–13) i pierwiastek ze średniego kwadratowego błędu prognozy RMSEP (metody 6–13), a następnie obliczono średnie arytmetyczne z uzyskanych wyników¹⁸. W celu sprawdzenia trafności „prognozy” oszacowano, na podstawie trójkątów szkód „przyszłych”, przeciętne powstałe szkody niezgłoszone ubezpieczycielowi (tablica 2).

Z tablicy 2 wynika, że wartość oczekiwana sumy wygenerowanych szkód to 70 362 828, w porównaniu z którą przeciętna wartość oszacowanej łącznej rezerwy IBNR w metodach deterministycznych: w metodzie SW1 (49 274 847) jest dużo niższa, w metodach CL (70 326 551) i BF (70 345 676) jest nieznacznie niedoszacowana; a w metodach SW2 (70 392 166) i GU (70 418 130) jest przeszacowana. Uśrednione estymowane łączne rezerwy IBNR w modelach stochastycznych: logarytmiczno-normalnych modelach klasy GLM (LN_GLM – 70 507 117 oraz boot_LN_GLM – 70 604 099) są przeciętnie wyższe niż wygenerowane średnie sumy szkód¹⁹, a w pozostałych modelach są średnio niższe niż przeciętna suma szkód.

W pracach [Jurkiewicz, Pobłocka, 2011 b; Pobłocka, 2012] bootstrapowy model Macka chain ladder klasy GLM (boot_Mack_CL_GLM) okazał się najdokładniejszym stochastycznym modelem łącznej rezerwy IBNR. Z tablicy 2 wynika, że ww. model, dla przyjętych w badaniu za-

¹⁷ Trójkąt szkód wypłaconych to górna „macierz trójkątna” zawierająca informacje o (liczbie lub wielkości) wypłaconych szkód powstałych lub zgłoszonych w i-tym okresie wypadkowym (dane poziome) oraz wypłaconych z opóźnieniem o j-okresów (dane pionowe). Trójkąt szkód przyszłych to dolna „macierz trójkątna” zawierająca informacje o przyszłych szkodach, które już powstały, lecz nie zostały jeszcze zgłoszone. Ich oszacowanie to rezerwy IBNR. Szerzej [Pobłocka, 2008].

¹⁸ W modelach bootstrapowych dla każdego z tysiąca badanych trójkątów szkód wypłaconych wygenerowano 10 tys. reszt bootstrapowych.

¹⁹ Jest to zapewne efekt przyjętego w symulacjach wykładniczego rozkładu indywidualnej szkody, który różni się od rozkładu logarytmiczno-normalnego.

łożeń, nie jest najdokładniejszą metodą szacującą powstałe majątkowe szkody ubezpieczeniowe niezgłoszone ubezpieczycielowi do dnia tworzenia rezerw (jego względny błąd prognozy kształtował się na poziomie 1,975%). Modelem najlepszym (najdokładniejszym wg tablicy 2) łącznej rezerwy IBNR okazały się stochastyczne modele chain ladder – klasyczny i bootstrapowy rozproszony model Poissona klasy GLM (ODP_GLM – 70 326 551 oraz boot_ODP_GLM – 70 328 077), których względny błąd prognozy kształtował się na poziomie 1,878%.

Tablica 2. Oszacowane na podstawie wygenerowanych 1 tys. macierzy szkód przeciętne łączne szkody, średnie rezerwy IBNR łącznie i odpowiadające im błędy prognoz: pierwiastki ze średniego kwadratowego błędu prognozy – RMSEP oraz „rzeczywiste błędy prognoz” – Real_RMSEP

Model	Rezerwa IBNR łącznie*	Błąd RMSEP	Błąd RMSEP w [%]	Błąd Real_RMSEP	Błąd Real_RMSEP w [%]
Średnia arytmetyczna sumy szkód	70 362 828	-	-	-	-
SW1	49 274 847	-	-	21 114 617	42,851%
SW2	70 392 166	-	-	3 215 452	4,568%
BF	70 345 676	-	-	1 116 199	1,587%
CL	70 326 551	-	-	1 335 550	1,899%
GU	70 418 130	-	-	2 130 608	3,026%
LN_GLM	70 507 117	3 048 737	4,324%	1 357 043	1,925%
ODP_GLM	70 326 551	1 320 473	1,878%	1 335 550	1,899%
Mack_GLM	70 326 551	1 370 406	1,949%	1 335 550	1,899%
boot_ODP_GLM	70 328 077	1 320 598	1,878%	1 335 049	1,898%
boot_gamma_GLM	70 352 529	2 971 983	4,224%	1 333 991	1,896%
boot_LN_GLM	70 604 099	2 839 358	4,022%	1 371 950	1,943%
boot_Mack_GLM	70 333 813	1 886 505	2,682%	1 334 663	1,898%
boot_Mack_CL_GLM	70 334 047	1 389 174	1,975%	1 334 691	1,898%

*Pogrubione liczby odpowiadają wartościom o najniższych błędach szacunku.

Źródło: Opracowanie własne.

Należy zauważyć, że w bootstrapowym modelu gamma klasy GLM średnia oszacowana rezerwa IBNR łącznie jest najbliższa średniej sumie wygenerowanych szkód, jednak dokładność tej metody jest niższa

(względny błąd prognozy kształtował się na poziomie 4,22%) niż ww. najdokładniejszych stochastycznych modeli chain ladder.

Analizując przedstawione w tablicy 3 wyniki oszacowanej rezerwy IBNR indywidualnie w poszczególnych okresach wypadkowych, nie można zidentyfikować optymalnego modelu wg błędu prognozy RMSEP.

Tablica 3. Oszacowane na podstawie wygenerowanych 1 tys. macierzy szkód średnie rezerwy IBNR indywidualnie w badanych okresach wypadkowych (w tys.) oraz ich błędy prognoz RMSEP w [%]

Model/ Rezerwa IBNR (błąd RMSEP w %)	rok 2	rok 3	rok 4	rok 5	rok 6	rok 7	rok 8	rok 9	rok 10
LN_GLM	77 (9,8%)	607 (7,7%)	1289 (6%)	2048 (5,3%)	3561 (5,1%)	5465 (5,1%)	8731 (5,4%)	14454 (6,1%)	34275 (8,2%)
ODP_GLM	76 (50,5%)	607 (16,2%)	1290 (10,7%)	2050 (8,4%)	3563 (6,2%)	5463 (5%)	8720 (4%)	14424 (3,2%)	34133 (2,5%)
Mack_GLM	76 (77,6%)	607 (15,8%)	1290 (10,8%)	2050 (8,5%)	3563 (6,3%)	5463 (5,1%)	8720 (4%)	14424 (3,2%)	34133 (2,5%)
boot_ODP_GLM	76 (50,5%)	607 (16,2%)	1290 (10,7%)	2050 (8,4%)	3563 (6,2%)	5463 (5%)	8720 (4%)	14424 (3,2%)	34134 (2,5%)
boot_gamma_GLM	77 (36,9%)	608 (14,6%)	1291 (10,7%)	2051 (8,9%)	3565 (7,5%)	5464 (6,8%)	8722 (6,4%)	14428 (6,3%)	34147 (7,7%)
boot_LN_GLM	77 (36,7%)	608 (14,5%)	1291 (10,5%)	2051 (8,8%)	3567 (7,4%)	5473 (6,6%)	8744 (6,1%)	14474 (6%)	34319 (7,3%)
boot_Mack_CL_GLM	77 (79,6%)	607 (18,7%)	1290 (11,9%)	2050 (9,1%)	3564 (6,6%)	5463 (5,2%)	8721 (4%)	14426 (3,1%)	34136 (2%)
boot_Mack_GLM	77 (105,3%)	607 (24,5%)	1291 (16,3%)	2050 (12,8%)	3564 (9,5%)	5463 (7,6%)	8721 (6%)	14425 (4,8%)	34136 (3,5%)

*Pogrubione liczby odpowiadają wartościom o najniższych błędach szacunku w danych okresach wypadkowych.

Źródło: Opracowanie własne.

2. Precyzja oszacowań rezerwy IBNR

W celu skontrolowania poprawności obliczeń miar dokładności rezerwy IBNR w badanych metodach deterministycznych oraz dla porównania wyników oszacowań uzyskanych przy użyciu metod deterministycznych (metod 1–5) z wynikami dla modeli stochastycznych (metod 6–13) obliczono miarę dokładności predykcji *ex post*, nazwaną „rzeczywistym błędem prognozy” (Real_RMSEP), będącą odpowiednikiem błędu prognozy RMSEP. Błąd ten pozwala zweryfikować poprawność obliczeń błędów rezerw w badanych metodach. Ukazuje on empiryczne przeciętne różnice pomiędzy wygenerowanymi szkodami a osza-

cowanymi rezerwami. Jest on liczony jako pierwiastek ze średniego kwadratowego błędu prognozy dla wykonanych symulacji²⁰:

$$\text{Real_RMSEP}(\hat{\theta}_j) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{NS} (\hat{\theta}_{j,k} - \theta_k)^2}{NS}}, \quad (1)$$

gdzie:

NS – liczba symulacji,

j – j -ta metoda w liczeniu rezerw,

θ – wielkość wygenerowanej szkody,

$\hat{\theta}$ – wielkość oszacowanej rezerwy IBNR odpowiadająca wygenerowanej szkodzie θ .

Z tablicy 2 (kolumny 6) wynika, że wg względnego rzeczywistego błędu prognozy (Real_RMSEP w [%]) najlepszą metodą szacowania łącznej rezerwy IBNR jest popularna metoda Bornhuettera-Fergusona, którą charakteryzuje największa dokładność (na poziomie 1,587%). Jednak oszacowane tą metodą przeciętne całkowite rezerwy IBNR (70 345 676) są niższe od średniej z wygenerowanej sumy szkód (70 362 828), chociaż do symulacji przyjęto współczynnik szkodowości na poziomie rzeczywistym. Jeśli w kalkulacjach współczynnik szkodowości będzie na poziomie wyższym niż rzeczywisty, to zgodnie z [Jurkiewicz, Pobłocka, 2011 a] oszacowane rezerwy IBNR będą znacznie przeszacowane. W efekcie metoda Bornhuettera-Fergusona²¹ powinna być stosowana ostrożnie, gdyż umożliwi prawidłowe szacunki przyszłych zobowiązań z tytułu powstałych szkód niezgłoszonych ubezpieczycielowi tylko dla współczynnika szkodowości określonego na poziomie rzeczywistym. Niestety, w momencie tworzenia rezerw techniczno-ubezpieczeniowych poziom tej miary nie jest znany i do kalkulacji przyjmuje się najczęściej wartość z poprzedniego okresu sprawozdawczego, która może zaburzać wyniki. Drugim najdokładniejszym modelem pod względem dokładności²² jest bootstrapowy model gamma klasy GLM (70 352 529), który charakteryzuje dokładność na poziomie 1,896% (Re-

²⁰ To odpowiednik empirycznego średniego błędu predykcji, czyli pierwiastek z uśrednionej sumy kwadratów błędów prognoz, tj. różnicy pomiędzy wygenerowanymi szkodami i oszacowanymi rezerwami. Szerzej [Strzała, Przechlewski, 1998].

²¹ Z raportu UKNF wynika, że prawie wszystkie zakłady ubezpieczeń przy szacowaniu rezerwy IBNR stosują jedną z metod: metodę Bornhuettera-Fergusona i metodę Chain-Ladder, bądź metodę Gunnara Benktandera [Bijak i inni, 2006].

²² Kryterium wyboru był minimalny „rzeczywisty błąd prognozy” (Real_RMSEP wyrażony w [%]) obliczony jako iloraz błędu Real_RMSEP do wartości oczekiwanej łącznej rezerwy IBNR.

al_RMSEP w [%]). Jednak on także nie doszacowuje średniej sumy szkód, a jego względne błędy prognoz są zawyżone (RMSEP w [%] jest równy 4,224%) i dlatego, w warunkach zbliżonych do przyjętych założeń w badaniu, raczej niewskazane jest jego stosowanie w praktyce. Kolejne najdokładniejsze metody wg względnego rzeczywistego błędu prognozy to stochastyczne i deterministyczne modele chain-ladder (boot_Mack_GLM, boot_Mack_CL_GLM, boot_ODP_GLM, ODP_GLM, Mack_GLM, CL). Założenia strukturalne tych modeli są łatwe do spełnienia w praktyce [Pobłocka, 2012] i dlatego modele te są godne polecenia w warunkach zbliżonych do przyjętych założeń.

Precyzja oszacowań we wszystkich badanych modelach stochastycznych wg względnych błędów prognozy (RMSEP w [%])²³ jest nie większa niż 5% (waha się od 1,88 do 4,22 pkt %), można by było zatem wnioskować, że badane modele dość dobrze (tzn. z wystarczającą precyzją, czyli wystarczająco dokładnie i „bezpiecznie”) szacują powstałe szkody niezgłoszone ubezpieczycielowi do dnia tworzenia rezerw. Jednak porównując dokładności obliczeń teoretycznych błędów prognozy (RMSEP) z rzeczywistymi empirycznymi (Real_RMSEP), należy podkreślić, że poprawność oszacowań błędów rezerw w modelach logarytmiczno-normalnych (LN_GLM i boot_LM_GLM) i gamma klasy GLM jest niższa niż w pozostałych modelach (w efekcie powoduje to przeszacowanie błędów rezerw RMSEP w ok. 2–3 pkt %). W modelach Macka klasy GLM błędy rezerw RMSEP są nieznacznie przeszacowane (w ok. 0,6–1 pkt %), a w modelach rozproszonego rozkładu Poissona klasy GLM błędy rezerw są nieznacznie niedoszacowane (w ok. 0,1–0,2 pkt %). Powyższe wyniki to efekt przyjętych założeń, które niewątpliwie należy poddać dalszej analizie w kolejnych badaniach.

3. Prawdopodobieństwo wystarczalności rezerwy IBNR

W celu oceny adekwatności poziomu tworzonych rezerw (sprawdzenia, w ilu procentach wyznaczone rezerwy są niedoszacowane lub przeszacowane) w tablicy 4 obliczono prawdopodobieństwo wystarczalności rezerw, które [Bijak i inni, 2006] zdefiniowali jako prawdopodobieństwo, z jakim utworzone rezerwy wystarczą na wypłatę przyszłych odszkodowań i świadczeń.

²³ Tzn. współczynnik zmienności obliczany jako pierwiastek ze średniego kwadratowego błędu prognozy w stosunku do średniej szkody.

Tablica 4. Prawdopodobieństwo wystarczalności rezerw dla rezerw IBNR ustalonych na poziomie wartości oczekiwanej rozkładu rezerw

Model	SW1	SW2	BF	CL	GU	LN_GLM	ODP_GLM	Mack_GLM	boot_ODP_GLM	boot_gamma_GLM	boot_LN_GLM	boot_Mack_CL_GLM	boot_Mack_GLM
Procent rezerw IBNR nie mniejszych niż łącznych szkód	0%	52%	49%	48%	51%	54%	48%	48%	48%	48%	58%	48%	48%

Źródło: Opracowanie własne.

Z tablicy 4 wynika, że oszacowane badanymi metodami rezerwy IBNR łącznie tylko w 48–58% są wystarczające (poza metodą SW1), tzn. nie mniejsze od wygenerowanej średniej sumy szkód. Oznacza to, że aż w 42–52% wygenerowane szkody są niedoszacowane i nawet w co drugim okresie sprawozdawczym tworzone łączne rezerwy IBNR mogą być niedoszacowane. Tak duży poziom niedoszacowania rezerw IBNR budzi niepokój, gdyż zagraża realności ochrony ubezpieczeniowej²⁴. W efekcie poszukiwany jest „bezpieczny” poziom rezerwy IBNR, który zapewni pokrycie powstałych szkód niezgłoszonych zakładowi ubezpieczeń do dnia tworzenia rezerw z prawdopodobieństwem większym niż badane do tej pory, np. 95%. Rozwiązaniem problemu być może będzie rynkowa wycena zobowiązań zgodna z aktualnymi wymogami europejskiego projektu wypłacalności Solvency II, według którego rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe mają być tworzone na poziomie najlepszego oszacowania (*best estimate*) i powiększone o pewien narzut bezpieczeństwa (m.in. *margin risk*, SCR) uwzględniający zmienność rezerw (*volatility*).

Powstaje jednak pytanie, jaka wielkość kryje się pod poziomem *best estimate*. Czy jest to wartość oczekiwana, mediana, czy może 95 kwantyl

²⁴ Od 1991 r. rezerwa IBNR stanowi ok. 17–20% rezerw techniczno-ubezpieczeniowych brutto.

rozkładu szacowanych rezerw IBNR? Jeżeli *best estimate* zostanie ustalone na poziomie średniej arytmetycznej lub mediany rozkładu oszacowanej rezerwy IBNR, to prawdopodobieństwo wystarczalności rezerw (tablica 5, kolumny 2 i 3) będzie na poziomie ok. 51% (44–58%), co niestety także nie wydaje się satysfakcjonujące. W przypadku gdy *best estimate* zostanie ustalone na poziomie 95 kwantyla rozkładu rezerw (tablica 5, kolumna 4), to prawdopodobieństwo wystarczalności wzrośnie o kilkadziesiąt pkt % (do poziomu 84–100%). Jednak tak wysoki poziom *best estimate* wydaje się mało realny i raczej nie do zaakceptowania przez organ nadzoru ubezpieczeniowego (KNF)²⁵.

Tablica 5. Prawdopodobieństwo wystarczalności rezerw dla rezerw IBNR ustalonych na poziomie średniej arytmetycznej, mediany i 95 kwantyla rozkładu rezerw

Model	Wielkość rezerwy IBNR ustalona na poziomie		
	średniej arytmetycznej	mediany	95 kwantyla
boot_ODP_GLM	48%	53%	84%
boot_gamma_GLM	48%	52%	100%
boot_LN_GLM	58%	44%	99%
boot_Mack_CL_GLM	48%	52%	85%
boot_Mack_GLM	48%	52%	94%

Źródło: Opracowanie własne.

Zakończenie

Z przeprowadzonej analizy w zakresie optymalnego modelu całkowitej rezerwy IBNR w warunkach praktycznych wynika, że najdokładniejszym stochastycznym modelem łącznej rezerwy IBNR, według kryterium miary dokładności błędów prognozy RMSEP, jest klasyczny rozproszony model Poissona klasy GLM. To nie potwierdza wyników badania przeprowadzonego przez Jurkiewicza i Pobłocką [2011 b], w którym najdokładniejszym modelem okazał się bootstrapowy model Macka chain-ladder klasy GLM. W badaniu niestety nie udało się zidentyfikować optymalnego modelu rezerwy IBNR indywidualnie w badanych okresach wypadkowych według rozważanego kryterium wyboru.

Z oceny poprawności obliczeń miar precyzji rezerwy IBNR w analizowanych metodach według względnego rzeczywistego błędu prognozy (Real_RMSEP w [%]) wynika, że stochastyczne i deterministyczne

²⁵ Powoduje zawyżenie rezerw techniczno-ubezpieczeniowych.

modele chain-ladder są godne polecenia praktykom, w warunkach zbliżonych do przyjętych w badaniu założeń.

Z rozważań nad ustaleniem bezpiecznego poziomu tworzonej rezerwy IBNR w ubezpieczeniach majątkowych wynika, że *best estimate* oszacowany na poziomie średniej arytmetycznej lub mediany rezerwy nie jest wystarczający i należy niewątpliwie go zwiększyć o pewien narzut bezpieczeństwa, zgodnie z projektem Solvency II, uwzględniając zmienność rezerw (np. 1, 2 lub 3 błędy prognozy RMSEP)²⁶. Powyższe propozycje zostaną zweryfikowane w kolejnych badaniach.

Literatura

1. Bijak W., Smętek G., Szymański G. (2006), *Analiza rezerw na niewypłacone odszkodowania i świadczenia z tytułu ubezpieczeń pozostałych osobowych i majątkowych w oparciu o trójkąty szkód*, raport KNF, Warszawa.
2. Charles J., Westphal S. (2006), *Stochastic reserving*, CAE Spring Meeting.
3. England P.D., Verrall R.J. (2002), *Stochastic claims reserving in general insurance*, *British Actuarial Journal* 8, GIRO.
4. Jurkiewicz T., Pobłocka A. (2011 a), *Ocena praktycznych metod szacowania rezerwy IBNR w ubezpieczeniach majątkowych*, w: *Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 228, Ronka-Chmielowiec W. (red.), Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław.
5. Jurkiewicz T., Pobłocka A. (2011 b), *Szacowanie rezerwy IBNR w ubezpieczeniach majątkowych metodami bootstrapowymi*, w: *Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu*, Wrocław (artykuł w druku).
6. Pinheiro P., de Lourdes Centeno M. (2000), *Bootstrap Methodology in Claim Reserving*, Centre for Applied Math's to Forecasting & Economic Decision, FCT PRAXIS XXI Silva.
7. Pobłocka A. (2012), *Aktuarialne modele szacowania rezerwy na zaistniałe niezgłoszone szkody w ubezpieczeniach majątkowych*, rozprawa doktorska obroniona na Wydziale Zarządzania Uniwersytetu Gdańskiego, Sopot.

²⁶ Na przykład [Bijak i inni, 2006] na podstawie swoich badań zaproponowali dla modelu Macka dla 10 grupy ubezpieczenia narzut bezpieczeństwa na poziomie 1,693 oczekiwanej rezerwy.

8. Pobłocka A. (2011), *Rezerwa IBNR – praktyczne metody jej szacowania* [w:] *Statystyka i ryzyko. Zagadnienia Aktuarialne – teoria i praktyka*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 207, Ostasiewicz W. (red.), Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław.
9. Pobłocka A. (2008), *Wybrane metody kalkulacji rezerwy IBNR*, w: *Ubezpieczenia wobec wyznań XXI wieku*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1197 Ronka-Chmielowiec W. (red.), Wrocław.
10. Ronka-Chmielowiec W. (2006), *Model kolektywnego ryzyka ubezpieczeniowego*, w: *Metody aktuarialne*, Kowalczyk P., Poprawska E., Ronka-Chmielowiec W. (red.), Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
11. Straub E. (1997), *Non-Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
12. Strzała K., Przechlewski T. (1998), *Ekonometria inaczej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk.
13. Taylor G., Ashe F. (1983), *Second moments of estimates of outstanding claims*, „*Journal of Econometrics*”, Vol. 23.
14. Wieteska S. (2004), *Rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe zakładów ubezpieczeń majątkowo-osobowych*, Wydawnictwo Branta, Bydgoszcz–Łódź.
15. Wuthrich M.V., Merz M. (2008), *Stochastic claims reserving methods in insurance*, John Wiley & Sons, Hoboken USA.

Streszczenie

Rezerwa z tytułu zaistniałych szkód niezgłoszonych (*Incurring But Not Reported*) jest bardzo istotną rezerwą w ubezpieczeniach majątkowo-osobowych. Zgodnie z projektem Solvency II rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe mają być tworzone według zasady „najlepszego oszacowania” (*best estimate*), która uwzględnia ocenę ich zmienności. W efekcie z dniem implementacji ww. projektu rezerwa IBNR powinna być estymowana metodami stochastycznymi. W artykule zaprezentowano wyniki badań nad optymalnym modelem rezerwy IBNR w ubezpieczeniach działu II oraz „bezpiecznym” (tj. wystarczającym do pokrycia roszczeń) poziomem jej tworzenia. Dodatkowo dokonano oceny poprawności obliczeń miar dokładności predykcji (błędów rezerw RMSEP) w analizowanych metodach.

Słowa kluczowe

rezerwa IBNR, metody szacowania rezerwy IBNR w ubezpieczeniach majątkowych, prawdopodobieństwo wystarczalności rezerw, projekt Solvency II, symulacje

Research into variability of IBNR reserve in non-life insurance (Summary)

Incurred but not reported reserve (IBNR) is important technical-provision in non-life insurance. This provision is identified with the highest insurance risk for non-life insurance companies, because the number of claims from its title, size and time are unknown at the time of provisioning, for this reason, its size may not be enough to cover the unreported damages. In Poland this technical-provision is mainly calculated by deterministic methods, but project Solvency II requires using stochastic methods, which take into consideration the estimation of their variability. The article presents results of conducted research into the optimal model of IBNR reserve and variability of IBNR provision in deterministic and stochastic methods.

Key words

IBNR reserves, deterministic and stochastic methods of evaluating the IBNR reserves in non-life insurance, Solvency II, simulations