Tadeusz Bołt*

Wagi portfelowe

Wstęp

W retrospektywnych artykułach poświęconych problemowi optymalizacji portfelowej [Rubinstein, 2002; Elton, Gruber, 1997] przedstawiono podstawowe motywacje i źródła inspiracji, które doprowadziły Markowitza do stworzenia podstaw analizy portfelowej. Ocenę obecnego stanu badań w interesującym nas zakresie dotyczącym problemu optymalizacji portfela papierów wartościowych zawiera monograficzny artykuł [Kolm i inni, 2014]. Artykuł niniejszy, choć dotyczy stosunkowo wąskiego zagadnienia wag portfelowych, ma również charakter monograficzny. Jego celem jest przedstawienie podstawowych sposobów wyznaczania wag portfelowych oraz zależności, jakie występują pomiędzy różnymi wektorami wag optymalnych.

Klasyczny problem alokacji bogactwa inwestora rozważany pierwotnie przez Markowitza [1952] może być rozpatrywany w kategoriach optymalizacji oczekiwanej funkcji użyteczności inwestora, bądź równoważnie – w kategoriach optymalizacji parametrów rozkładu portfela. W artykule omówiono wagi portfelowe maksymalizujące kwadratową funkcję oczekiwanej użyteczności oraz minimalizujące wariancję stopy zwrotu portfela, a także ukazano zależności między tymi wagami.

1. Oznaczenia

Niech $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ldots \ r_G]'$ oznacza kolumnowy wektor ryzykownych stóp zwrotu z inwestycji dostępnych na rynku, $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \ \mu_2 \ldots \ \mu_G]'$ kolumnowy wektor oczekiwanych stóp zwrotu o elementach $\mu_i = Er_i$, $\boldsymbol{\Sigma} = \lfloor \sigma_{ij} \rfloor (i, j = 1, \ldots, G) G \times G$ wymiarową, dodatnio określoną, macierz wariancji-kowariancji stóp zwrotu.

Strukturę portfela określa kolumnowy wektor wag $\mathbf{w} = [w_1 \ w_2 \ldots \ w_G]'$. W dalszej części artykułu rozpatrywać będziemy szczególne sytuacje, w których nakładane są ograniczenia na elementy wektora wag. Najbardziej typowym, choć nie zawsze spełnionym, jest ograniczenie wynika-

* Prof. UG dr hab., Katedra Ekonometrii, Wydział Zarządzania, Uniwersytet Gdański, ul. Armii Krajowej 101, Sopot 81-824, tadeusz.bolt@ug.edu.pl

jące z warunku budżetowego, którego konsekwencją jest sumowanie się wag portfelowych do jedności, tj. $\mathbf{w}'\,\mathbf{i} = 1$, gdzie $\mathbf{i}$ jest kolumnowym wektorem jedynek. W całym artykule zakłada się brak ograniczeń dotyczących krótkiej sprzedaży walorów obecnych na rynku, co skutkuje brakiem ograniczeń normalizujących wagi na przedziale $\leq 0;1 \geq$ i umożliwia wyprowadzenie funkcyjnych zależności określających wagi optymalne [Kolm i inni, 2014].

Stopa zwrotu portfela (r_p), oczekiwana stopa zwrotu portfela (μ_p) oraz wariancja stopy zwrotu portfela (σ_p^2) są dane odpowiednio:

$$r_p = \mathbf{w}'\mathbf{r},\ \mu_p = \mathbf{w}'\mu,\ \sigma_p^2 = \mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}. \tag{1}$$

W przypadku gdy dostępny jest walor pozbawiony ryzyka o stopie zwrotu r_f, jego udział w portfelu jest wyznaczany rezydualnie jako $w_f = 1 - \mathbf{w}'\mathbf{i}$. Strukturę portfela mieszanego określa wektor wag $\mathbf{w}^* = [\mathbf{w}'\ w_f\,]' = [\mathbf{w}'1 - \mathbf{w}'\mathbf{i}]'$. Stopa zwrotu portfela (r_p), oczekiwana stopa zwrotu portfela (μ_p) oraz wariancja stopy zwrotu portfela (σ_p^2) są w tym przypadku dane odpowiednio:

$$r_p = \mathbf{w}'(\mathbf{r} - r_f\mathbf{i}) + r_f,\ \mu_p = \mathbf{w}'(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{i}) + r_f,\ \sigma_p^2 = \mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} \tag{2}$$

gdzie: $(\mathbf{r} - r_f\mathbf{i}) = [r_1 - r_f\ \ r_2 - r_f\ \ldots\ r_G - r_f\,]'$ jest kolumnowym wektorem nadwyżkowych stóp zwrotu, natomiast $(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{i})$ jest kolumnowym wektorem nadwyżkowych oczekiwanych stóp zwrotu.

Wprowadzimy ponadto oznaczenia skalarnych form kwadratowych i dwuliniowych:

$$a_1 = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu},\ a_{1f} = (\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{i})'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{i}),\ a_2 = \mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu},\ a_3 = \mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i} \tag{3}$$

które umożliwią przedstawienie wyników dotyczących wag portfelowych w zwartych postaciach.

2. Wagi maksymalizujące oczekiwaną użyteczność inwestycji

Problem Markowitza zapisać można jako zadanie maksymalizacji oczekiwanej (kwadratowej) funkcji użyteczności inwestycji ($\overline{U}$) w postaci [Okhrin, Schmid, 2006; Kourtis i inni, 2012][1]:

$$\overline{U} = \mu_p - \frac{\gamma}{2}\sigma_p^2 \underset{w}{\rightarrow} \max \tag{4}$$

gdzie: γ jest współczynnikiem niechęci wobec ryzyka, który dla inwestora niechętnego wobec ryzyka jest dodatni. Współczynnik ten określa przy-

[1] W pracy [Kim i inni, 2014] rozpatrywana jest funkcja zapisana jako $\overline{U} = \frac{1}{2}\sigma_p^2 - \lambda\mu_p \underset{w}{\rightarrow} \min$, która prowadzi do analogicznego wyniku.

rost oczekiwanej stopy zwrotu portfela, jaki towarzyszyć powinien wzrostowi ryzyka portfela o jednostkę dla zachowania niezmienionego poziomu oczekiwanej użyteczności inwestycji. Oczekiwana użyteczność zapisana w (4) jest rosnącą funkcją oczekiwanej stopy zwrotu portfela oraz malejącą funkcją ryzyka portfela, mierzonego wariancją stopy zwrotu.

Wyznaczając bezwarunkowe maksimum (4), tj. nie nakładając jakichkolwiek warunków na wagi portfelowe oraz nie zakładając realizacji zadanej, oczekiwanej stopy zwrotu portfela, otrzymujemy wektor wag o postaci:

$$\mathbf{w}_M = \frac{1}{\gamma}\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} \tag{5}$$

Wektor wag (5) nie spełnia warunku budżetowego, tj. $\mathbf{w}'_M\,\mathbf{i} \neq 1$. Wyznacza on portfel o parametrach $\mu_{Mp} = \mathbf{w}'_M\,\boldsymbol{\mu} = \frac{a_1}{\gamma}$ oraz $\sigma^2_{Mp} = \mathbf{w}'_M\,\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}_M = \frac{a_1}{\gamma^2}$, który maksymalizuje oczekiwaną użyteczność portfela dla danej, założonej wartości współczynnika niechęci wobec ryzyka.

Jeżeli wprowadzimy ograniczenie budżetowe $\mathbf{w}'\mathbf{i} = 1$, wtedy wyznaczać będziemy warunkowe maksimum (4), zatem rozwiązywać będziemy problem:

$$\overline{U} = \mu_p - \frac{\gamma}{2}\sigma^2_p \underset{w}{\rightarrow} \max \mid \text{ przy } \mathbf{w}'\mathbf{i} = 1 \tag{6}$$

Konstruując odpowiednią do problemu (6) funkcję Lagrange'a, tj. $L = \mu_p - \frac{\gamma}{2}\sigma^2_p - \lambda(\mathbf{w}'\mathbf{i} - 1)$, gdzie λ jest nieoznaczonym mnożnikiem Lagrange'a, wektor wag optymalnych ($\mathbf{w}_1$), spełniający warunek budżetowy, zapiszemy w postaci [Okhrin, Schmid, 2006][2]:

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{a_3}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i} + \frac{1}{\gamma}\mathbf{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \frac{a_2}{a_3}\mathbf{i}) \tag{7}$$

Można pokazać, że między wektorami wag (5) i (7) istnieje zależność o postaci:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_M - \frac{\lambda}{\gamma}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i} \tag{8}$$

[2] Wzory zamieszczone w [Okhrin, Schmid, 2006] są zapisane w równoważnej, lecz nieco zmienionej postaci.

gdzie $\lambda = \frac{1}{a_3}(a_2 - \gamma)$ jest optymalnym rozwiązaniem dla mnożnika Lagrange'a z funkcji $L = \mu_p - \frac{\gamma}{2}\sigma_p^2 - \lambda(\mathbf{w}'\mathbf{i} - 1)$.

Biorąc powyższe pod uwagę, możemy wyznaczyć parametry rozkładu portfela spełniającego warunek budżetowy w następujący sposób:

$$\mu_{1p} = \mathbf{w}'_1\boldsymbol{\mu} = \mu_{Mp} - \frac{\lambda}{\gamma}a_2; \sigma_{1p}^2 = \mathbf{w}'_1\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_1 = \sigma_M^2 + \frac{\lambda}{\gamma^2}(\lambda a_3 - 2a_2) \quad (9)$$

Ponieważ wyrażenia $\frac{\lambda}{\gamma}a_2$ oraz $\frac{\lambda}{\gamma^2}(\lambda a_3 - 2a_2)$ przybierać mogą dowolne wartości, dla danego współczynnika niechęci wobec ryzyka γ zarówno oczekiwane stopy zwrotu, jak i wariancje obu portfeli, tj. (5) i (8), mogą być albo mniejsze, albo większe względem siebie.

Jako szczególny przypadek rozpatrywany jest portfel o globalnie najmniejszym ryzyku (GMVP), który znajdujemy, minimalizując wariancję stopy zwrotu portfela, przy warunku budżetowym [Kourtis i inni, 2012]:

$$\sigma_p^2 \underset{w}{\rightarrow} \min \mid \text{przy } \mathbf{w}'\mathbf{i} = 1 \quad (10)$$

Rozwiązaniem tego problemu jest wektor wag zapisany jako:

$$\mathbf{w}_{GMVP} = \frac{1}{a_3}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i} \quad (11)$$

Wektor (11) definiuje portfel o parametrach: $\mu_{GMVP} = \mathbf{w}'_{GMVP}\boldsymbol{\mu} = \frac{a_2}{a_3}$ oraz $\sigma_{GMVP}^2 = \mathbf{w}'_{GMVP}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{GMVP} = \frac{1}{a_3}$. Zależność pomiędzy wektorami wag (7) i (11) definiuje równanie:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_{GMVP} + \mathbf{w}_\gamma \quad (12)$$

gdzie $\mathbf{w}_\gamma = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \frac{a_2}{a_3}\mathbf{i})$. Oczekiwana stopa zwrotu portfela oraz jego wariancja mogą być zatem zapisane jako:

$$\mu_{1p} = \mathbf{w}'_1\boldsymbol{\mu} = \mu_{GMVP}; \sigma_{1p}^2 = \mathbf{w}'_1\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_1 = \sigma_{GMVP}^2 + \mathbf{w}'_\gamma\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_\gamma \quad (13)$$

ponieważ $\mathbf{w}'_\gamma\mathbf{i} = 0$ oraz $\mathbf{w}'_{GMVP}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_\gamma = 0$. Jeśli, co zakładaliśmy, macierz $\boldsymbol{\Sigma}$ jest określona dodatnio, zatem forma kwadratowa $\mathbf{w}'_\gamma\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_\gamma > 0$, z czego wynika, że $\sigma_{1p}^2 > \sigma_{GMVP}^2$.

Rozważmy obecnie problem budowy portfela w przypadku, gdy dostępny jest walor pozbawiony ryzyka. Kwadratowa funkcja oczekiwanej użyteczności przyjmuje w tym przypadku postać [Okhrin, Schmid, 2006]:

$$\overline{U} = \mathbf{w}'(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{i}) + r_f - \frac{\gamma}{2}\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \underset{\mathbf{w}}{\to} \max \tag{14}$$

Bezwarunkowym rozwiązaniem tego problemu jest wektor wag:

$$\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{i}) \tag{15}$$

Wektor ten nie sumuje się do jedności, tj. $\mathbf{w}'_2\,\mathbf{i} \neq 1$. W portfelu mieszanym udział waloru pozbawionego ryzyka wyznaczany jest rezydualnie jako $w_{2f} = 1 - \mathbf{w}'_2\,\mathbf{i}$. W konsekwencji wektor (15) definiuje portfele o parametrach:

$$\mu_{2p} = \mathbf{w}'_2(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{i}) + r_f = \frac{a_{1f}}{\gamma} + r_f;\ \sigma^2_{2p} = \mathbf{w}'_2\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_2 = \frac{a_{1f}}{\gamma^2} \tag{16}$$

gdzie a_{1f} jest skalarem zdefiniowanym w (3).

3. Wagi minimalizujące wariancję przy zadanej oczekiwanej stopie zwrotu portfela

Alternatywnie wobec procedury opisanej w punkcie poprzednim rozpatrywać będziemy obecnie problem wyznaczania wag portfelowych przy kryterium minimalizacji wariancji stopy zwrotu portfela dla zadanego poziomu oczekiwanej stopy zwrotu[3]. W takim przypadku rozpatrujemy problem warunkowej minimalizacji zapisany jako [Campbell i inni, 1997, s. 184]:

$$\sigma^2_p = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \underset{\mathbf{w}}{\to} \min \mid \text{przy } \mathbf{w}'\mathbf{i} = 1 \text{ i } \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} = \mu_{0p} \tag{17}$$

gdzie μ_{0p} jest założonym, oczekiwanym poziomem stopy zwrotu.

Problem zapisany w (17) sprowadzamy do minimalizacji funkcji Lagrange'a $L = \frac{1}{2}\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} - \lambda_1(\mathbf{w}'\mathbf{i} - 1) - \lambda_2(\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} - \mu_{0p})$, gdzie λ_1, λ_2 są nieoznaczonymi mnożnikami Lagrange'a. Portfele otrzymane w wyniku rozwiązania problemu (17) nazywamy portfelami o minimalnej wariancji (MVP). Rozwiązanie to zapiszemy w postaci [Bołt, 2009]:

$$\mathbf{w}_{MVP} = \tilde{\lambda}_1\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i} + \tilde{\lambda}_2\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} \tag{18}$$

[3] Problem Markowitza przedstawić można równoważnie jako zadanie maksymalizacji oczekiwanej stopy zwrotu portfela, przy danym ryzyku [Kolm i inni, 2014].

gdzie: a_1, a_2, a_3 są skalarami zdefiniowanymi w (3), $a_4 = a_1 a_3 - a_2^2$, $\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{a_4}(a_1 - a_2 \mu_{0p})$, $\tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{a_4}(a_3 \mu_{0p} - a_2)$ są natomiast optymalnymi rozwiązaniami dla mnożników Lagrange'a. Zauważmy, że wektor wag (18) zależy od przyjętego poziomu oczekiwanej stopy zwrotu portfela, zatem wektor ten będzie definiował portfele minimalnego ryzyka dla różnych założonych oczekiwanych stóp zwrotu portfela. Rozdzielając składowe niezależne i zależne od μ_{0p}, otrzymamy równoważną postać (19), którą zapiszemy jako [Campbell i inni, 1997, s. 184–185]:

$$\mathbf{w}_{MVP} = \mathbf{g} + \mathbf{h}\mu_{0p} \tag{19}$$

gdzie: $\mathbf{g} = \frac{1}{a_4}(a_1 \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i} - a_2 \mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})$, $\mathbf{h} = \frac{1}{a_4}(a_3 \mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} - a_2 \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i})$.

Wektor wag (18) definiuje portfele o parametrach: $\mathbf{w}'_{MVP}\boldsymbol{\mu} = \mu_{0p}$ oraz $\sigma^2_{MVP} = \mathbf{w}'_{MVP}\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}_{MVP} = \frac{a_3}{a_4}\mu^2_{0p} - \frac{2a_2}{a_4}\mu_{0p} + \frac{a_1}{a_4}$. Wariancja portfeli minimalnego ryzyka jest zatem kwadratową funkcją założonych oczekiwanych poziomów stopy zwrotu tych portfeli. Szczególnym przypadkiem portfela MVP jest, omawiany w poprzednim punkcie, portfel o globalnie najmniejszym ryzyku, którego wagi dane są w równaniu (11).

Podobnie jak w punkcie poprzednim rozważmy obecnie problem budowy portfela w przypadku, gdy dostępny jest walor pozbawiony ryzyka. Rozpatrywać będziemy problem znalezienia wag minimalizujących wariancję portfela mieszanego, dla założonego poziomu oczekiwanej stopy zwrotu:

$$\sigma^2_p = \mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} \underset{\mathbf{w}}{\rightarrow} \min \mid \text{przy } \mathbf{w}'(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{i}) + r_f = \mu_{0p} \tag{20}$$

W problemie (20) włączony został warunek budżetowy. Suma wag portfelowych $\mathbf{w}$, w ogólnym przypadku, nie jest równa jedności, tj.: $\mathbf{w}'\mathbf{i} \neq 1$. Udział waloru pozbawionego ryzyka jest wyznaczony rezydualnie jako: $w_f = 1 - \mathbf{w}'\mathbf{i}$. Stąd $\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} + r_f(1 - \mathbf{w}'\mathbf{i}) = \mu_{0p}$, gdzie μ_{0p} jest założonym poziomem oczekiwanej stopy zwrotu portfela. Funkcja Lagrange'a będzie w tym przypadku miała postać: $L = \frac{1}{2}\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} - \lambda\{\mathbf{w}'(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{i}) - r_f - \mu_{0p}\}$.

Wektor wag minimalizujący (20) zapiszemy jako:

$$\mathbf{w}_{MVPf} = \frac{\mu_{0p} - r_f}{a_{1f}} \mathbf{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{i}) \tag{21}$$

gdzie a_{1f} jest skalarem zdefiniowanym w (3).

Wektor ten definiuje portfel o parametrach $w'_{MVPf}(\mu - r_f \mathbf{i}) + r_f = \mu_{0p}$ oraz $\sigma^2_{MVPf} = \mathbf{w}'_{MVPf}\,\mathbf{\Sigma w}_{MVPf} = \dfrac{(\mu_{0p} - r_f)^2}{a_{1f}}$.

Wagi (21) wyznaczają portfele będące kombinacjami walorów ryzykownych i papieru pozbawionego ryzyka, dla założonego oczekiwanego poziomu stopy zwrotu portfela.

W literaturze przedmiotu [Engle, Colacino, 2006] rozważany jest nieco inny wariant zapisu problemu (20), w którym warunek ograniczający, dotyczy oczekiwanej nadwyżkowej stopy zwrotu z walorów ryzykownych μ_{0e}, co zapisujemy: $\mathbf{w}'(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{i}) = \mu_{0e}$. W takim przypadku problem (20) przybiera postać:

$$\sigma^2_p = \mathbf{w}'\mathbf{\Sigma w} \underset{\mathbf{w}}{\rightarrow} \min \mid \text{przy } \mathbf{w}'(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{i}) = \mu_{0e}, \tag{22}$$

którego rozwiązaniem jest:

$$\mathbf{w}_{MVPf} = \frac{\mu_{0e}}{a_{1f}} \mathbf{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{i}) \tag{23}$$

Wzory (21) i (23) są równoważne, gdyż $\mu_{0p} = \mu_{0e} + r_f$.

Szczególnym przykładem portfela (21) jest tzw. portfel styczny, znajdujący się na krzywej portfeli minimalnego ryzyka w punkcie styczności z linią łączącą walor pozbawiony ryzyka z tym portfelem [Bołt, 2009]. Współczynnik kierunkowy tej linii jest nazywany jest współczynnikiem Sharpe'a (S_p). W warunkach równowagi na rynku współczynnik ten ma interpretację jako współczynnik kierunkowy linii rynku kapitałowego. Wektor wag dla tego portfela znajdziemy jako rozwiązanie problemu maksymalizacji współczynnika Sharpe'a, tj.:

$$S_p = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p} \underset{w}{\rightarrow} \max \tag{24}$$

W zadaniu (24) μ_p nie jest założonym poziomem oczekiwanej stopy zwrotu portfela, lecz parametrem, którego wartość wynikać będzie z rozwiązania (24) dla wag portfelowych. Wektorem maksymalizującym (24) jest wektor $\dfrac{\mu_p - r_f}{\sigma^2_p}\mathbf{w}^*_s = \mathbf{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{i})$, który nie spełnia warunku budżetowego. Normalizując jego elementy, tj. znajdując sumę $\dfrac{\mu_p - r_f}{\sigma^2_p}\mathbf{i}'\mathbf{w}^*_s = \mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{i})$ oraz dzieląc elementy wektora

$\frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p^2}\mathbf{w}_s^*$ przez tę sumę, otrzymujemy wektor [Campbell i inni, 1997, s. 188]:

$$\mathbf{w}_s = \frac{1}{\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{i})}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{i}) \tag{25}$$

którego elementy spełniają warunek budżetowy, tj. $\mathbf{i}'\mathbf{w}_s = 1$. Wynika z tego, że udział waloru pozbawionego ryzyka w omawianym portfelu jest równy zeru. Wektor ten definiuje portfel o parametrach: $\mu_S = w'_S(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{i})$ oraz $\sigma_S^2 = \mathbf{w}'_S\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_S = \frac{a_{1f}}{\{\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{i})\}^2}$. Zauważmy, że wektor $\mathbf{w}_S$ w odróżnieniu od wektora $\mathbf{w}_{MVPf}$ nie zależy od przyjętego poziomu oczekiwanej stopy zwrotu, lecz wyznacza stopę zwrotu, przy której współczynnik Sharpe'a jest maksymalny, tj. $S_{\max} = \frac{\mu_S - r_f}{\sigma_S}$. Warto zauważyć, że dla portfela, którego wagi określone są w (21), współczynnik Sharpe'a jest równy: $S_{MPVf} = \sqrt{a_{1f}} = \sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{i})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{i})}$.

4. Wagi estymowane

Wagi portfelowe przedstawione w punkcie 2 i 3 są funkcjami nieznanych w okresach przyszłych parametrów rozkładu stóp zwrotu składowych portfela aktywów. Decyzje odnośnie do alokacji aktywów podejmowane są w chwili bieżącej, ale muszą odnosić się do okresów przyszłych, wynikających z horyzontu inwestycji. Istotnym problemem jest znalezienie odpowiednich oszacowań tych parametrów, tak by zminimalizować ewentualną stratę na użyteczności inwestycji, wynikającą z błędów popełnionych w ich estymacji. W literaturze przedmiotu [Candelon i inni, 2012] wymieniane są różne sposoby szacowania/prognozowania tych parametrów. Tradycyjnym sposobem postępowania jest szacowanie tych parametrów na podstawie danych historycznych o częstotliwości obserwacji zgodnej z horyzontem inwestycji. Drugim sposobem jest wygenerowanie szeregu czasowego wag optymalnych, na podstawie „eksperymentu ex post" i wyznaczenie prognoz tych wag na okresy przyszłe. Trzecim rozwiązaniem jest wykorzystanie modeli ekonometrycznych należących do klasy GARCH i prognozowanie warunkowych parametrów na ich podstawie [Engle, Colacino, 2006].

Niech $\mathbf{r}_t = [r_{1t}\ r_{2t}\ \dots\ r_{Gt}]', (t = 1, \dots, T)$ oznacza kolumnowy wektor stóp zwrotu z okresu *t*. Oszacowaniami wektora oczekiwanych stóp zwrotu oraz macierzy kowariancji są odpowiednio: $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{T}\Sigma_{\tau=1}^{T}\mathbf{r}_t$ oraz $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{T-1}\Sigma_{t=1}^{T}(\mathbf{r}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{r}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}})'$. W konsekwencji można oszacować wektory wag optymalnych omawiane w punktach 2 i 3. Na przykład[4] oszacowaniem wektora wag zdefiniowanego w (11) jest $\hat{\mathbf{w}}_{GMVP} = \frac{1}{\hat{a}_3}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{i}$. W pracy [Okhrin, Schmid, 2006] omówione są własności tak zdefiniowanych estymatorów wektorów wag optymalnych, przy założeniu, że wektory stóp zwrotu są niezależne i mają jednakowe rozkłady normalne. Autorzy pokazują, że estymator wektora wag dla portfela o globalnie najmniejszym ryzyku $\hat{\mathbf{w}}_{GMVP} = \frac{1}{\hat{a}_3}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{i}$ ma najlepsze własności statystyczne spośród estymatorów wag optymalnych omówionych w punkcie 2, tj. $\hat{\mathbf{w}}_M$, $\hat{\mathbf{w}}_1$, $\hat{\mathbf{w}}_2$, $\hat{\mathbf{w}}_{GMVP}$.

Drugi sposób postępowania polega na wykorzystaniu rekurencyjnych lub rolowanych oszacowań wektora oczekiwanych stóp zwrotu i macierzy kowariancji.

Niech $\hat{\boldsymbol{\mu}}_t = \frac{1}{t}\Sigma_{i=1}^{t}\mathbf{r}_i$ oraz $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_t = \frac{1}{t-1}\Sigma_{t=1}^{t}(\mathbf{r}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}_i)(\mathbf{r}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}_i)', (t = t_p, \dots, T)$, gdzie t_p definiuje próbę o minimalnej liczebności, będą oszacowaniami rekurencyjnymi. W takim przypadku wyznaczyć możemy ciąg wektorów wag na kolejne okresy $t \geq t_p$, z wykorzystaniem rekurencyjnych ocen parametrów. Otrzymujemy wagi dla portfeli o globalnie najmniejszym ryzyku:

$$\hat{\mathbf{w}}_{GMVP,t} = \frac{1}{\hat{a}_{3t}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_t^{-1}\mathbf{i}, (t = t_p, \dots, T) \tag{26}$$

gdzie $\hat{a}_{3t} = \mathbf{i}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_t^{-1}\mathbf{i}$. W podobny sposób wyznaczyć można oszacowania pozostałych wektorów wag omawianych w punktach 2 i 3.

Wektory z (26) tworzą zatem wielowymiarowy szereg czasowy o długości $(T - t_p + 1)$, dla którego zbudować można modele należące do klasy ARMA dla poszczególnych składowych wektora wag lub model wektorowy należący do klasy VARMA. Pozwoli to na wyznaczenie prognoz wektorów wag na okresy pozapróbkowe.

---

[4] W tym punkcie omawiać będziemy tylko estymatory wag dla portfeli o globalnie najmniejszym ryzyku.

W przypadku strategii inwestycyjnych wykorzystujących wiedzę o zmienności stóp zwrotu problem Markowitza dotyczący portfela o globalnie najmniejszym ryzyku można zapisać jako[5]:

$$\mathbf{w}'_t \mathbf{H}_t \mathbf{w}_t \underset{w}{\rightarrow} \min \mid \text{przy } \mathbf{w}'_t \mathbf{i} = 1 \tag{27}$$

gdzie $\mathbf{H}_t$ jest warunkową macierzą kowariancji, $\mathbf{w}_t$ jest kolumnowym wektorem wag, którego rozwiązaniem jest $\mathbf{w}_{H,t} = \frac{1}{a_{H,t}} \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{i}$, przy czym $a_{H,t} = \mathbf{i}' \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{i}$.

Do szacowania macierzy wariancji stóp zwrotu wykorzystywane są dane wewnątrzdzienne [Fleming i inni, 2001]. W pracy [Clements, Silvennoinen, 2013] dokonano oszacowania warunkowej macierzy kowariancji za pomocą: $\hat{\mathbf{H}}_t = \Sigma_{i=1}^{N} \mathbf{r}_t^i (\mathbf{r}_t^i)'$, $(t = 1, \ldots T)$, gdzie $\mathbf{r}_t^i$ jest kolumnowym wektorem wewnątrzdziennych stóp zwrotu w i-tym przedziale czasowym, N to liczba takich przedziałów w ciągu dnia. W oparciu o te oszacowania wyznaczyć można wektory wag. W omawianym przypadku wektor ten będzie miał postać: $\hat{\mathbf{w}}_{H,t} = \frac{1}{\hat{a}_{H,t}} \hat{\mathbf{H}}_t^{-1} \mathbf{i}$. W podobny sposób wyznaczyć można oszacowania pozostałych przedstawionych w artykule wektorów wag optymalnych. Jako kryterium porównawcze portfeli otrzymywanych przy różnych prognozach wag wykorzystuje się zwykle współczynnik Sharpe'a [Fleming i inni, 2001]. W pracy [Clements, Silvennoinen, 2013] korzyści ekonomiczne wynikające z wykorzystania różnych prognoz wag portfelowych porównywane są za pomocą wartości funkcji użyteczności, jakie generują otrzymane w ten sposób portfele.

Zakończenie

Optymalne wagi portfelowe maksymalizujące kwadratową funkcję oczekiwanej użyteczności inwestycji, określone w (5), (7) oraz (15), są odwrotnie proporcjonalne do przyjętego współczynnika niechęci wobec ryzyka γ. Zależności między nimi przedstawiono w równaniach (8) oraz (12). Wagi minimalizujące wariancję stopy zwrotu portfela przedstawiono w równaniach (18), (21), natomiast wagi maksymalizujące współczynnik Sharpe'a w równaniu (25). Wszystkie wektory wag zależą od nieznanych parametrów rozkładów stóp zwrotu składowych portfela. W artykule

[5] W pracy [Engle, Colacino, 2006] omawiane są wagi dla portfela minimalnego ryzyka dla założonej oczekiwanej stopy zwrotu portfela, tj. $\mathbf{w}'_t \mathbf{H}_t \mathbf{w}_t \underset{w}{\rightarrow} \min \mid$ przy $\mathbf{w}'_t \mathbf{i} = \mu_{0p}$. Zob. też [Varga-Haszonits, Kondor, 2007; Fiszeder, 2009, s. 284–285].

omówiono trzy sposoby szacowania wag portfelowych: w oparciu o dane historyczne o częstotliwości obserwacji zgodnej z horyzontem inwestycji, w oparciu o wygenerowane szeregi czasowe wag optymalnych, na podstawie „eksperymentu ex post'' i wyznaczenie prognoz tych wag na okresy przyszłe oraz w oparciu o modele ekonometryczne należące do klasy GARCH i prognozowanie warunkowych parametrów na ich podstawie.

Literatura

1. Alexander G. J., Baptista A. M. (2010), *Active portfolio management with benchmarking; A frontier based on alfa,* „Journal of Banking & Finance", Vol. 34.
2. Bodnar T., Okhrin Y. (2013), *Boundaries of the risk aversion coefficient: Should we invest in the global minimum variance portfolio?,* „Applied Mathematics and Computation", Vol. 219.
3. Bołt T. W. (2009), *O interpretacji linii rynku kapitałowego w świetle zasady separacji*, Prace i Materiały Wydziału Zarządzania UG, nr 4/2.
4. Campbell J. Y., Lo A. W., MacKinlay A. C. (1997), *The econometrics of financial markets,* Princeton University Press, Princeton.
5. Candelon B., Hurlin C., Tokpavi S. (2012), *Sampling error and double shrinkage estimation of minimum variance portfolios,* „Journal of Empirical Finance", Vol. 19.
6. Clements A., Silvennoinen A. (2013), *Volatility timing; How best to forecast portfolio exposures*, ,,Journal of Empirical Finance'', Vol. 24.
7. Elton E. J., Gruber M. J. (1997), *Modern portfolio theory, 1950 to date,* ,,Journal of Banking & Finance", Vol. 21.
8. Engle R., Colacino R. (2006), *Testing and valuing dynamic correlations for asset allocation,* ,,Journal of Business & Economic Statistics'', Vol. 24.
9. Fiszeder P. (2009), *Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych,* Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń.
10. Fleming J., Kirby C., Ostdiek B. (2001), *The economic value of volatility timing*, ,,Journal of Finance'', Vol. 67.
11. Kim W. C., Kim J. H., Fabozzi, F. J. (2014), *Deciphering robust portfolios,* „Journal of Banking & Finance", Vol. 45.
12. Kolm P. N., Tütüncü R., Fabozzi F. J. (2014), *60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends,* ,,European Journal of Operational Research'', Vol. 234.

13. Kourtis A., Dotsis G., Markellos R. N. (2012), *Parameter uncertainty in portfolio selection; Shrinking the inverse covariance matrix*, „Journal of Banking & Finance'', Vol. 36.
14. Markowitz H. (1952), *Portfolio selection*, „Journal of Finance'', Vol. 7.
15. Okhrin Y., Schmid W. (2006), *Distributional properties of portfolio weights*, „Journal of Econometrics'', Vol. 134.
16. Rubinstein M. (2002), *Markowitz's ''portfolio selection'': A fifty-year retrospective*, „Journal of Finance'', Vol. 57.
17. Varga-Haszonits I., Kondor I. (2007), *Noise sensivity of portfolio selection in constant conditional correlation GARCH models*, „Physica", Vol. 385.

Streszczenie

Artykuł ma charakter przeglądowy. Rozważane są w nim wagi portfelowe maksymalizujące kwadratową funkcję oczekiwanej użyteczności oraz minimalizujące wariancję stopy zwrotu portfela, a także ukazane są zależności między tymi wagami. W artykule omówiono problem estymacji optymalnych wag portfelowych.

Słowa kluczowe

optymalizacja portfela, wagi portfelowe

Portfolio weights (Summary)

This paper presents review of portfolio optimization. Portfolio weights which maximize expected utility function or minimize portfolio variance are compared and relation between them is shown. The problem of estimation of optimal portfolio weights is also discussed.

Keywords

portfolio optimization, portfolio weights